

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Теория узлов. Дополнительные главы   |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладная математика и информатика  |
| <b>профиль подготовки:</b> | Анализ данных в экономике<br>Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики<br>кафедра дискретной математики |
| <b>курс:</b>               | 3  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.03.2023

## Аннотация

Данный курс является продолжением курса Теория узлов. В данном курсе подробно рассматриваются вопросы Гомологии Хованова, Инвариант Расмуссена. Подробно разбираются Виртуальные узлы, Инвариантные полиномы виртуальных узлов и Свободные узлы. Особое внимание уделяется новой теории кодирования узлов с помощью так называемых d-диаграмм, а также теории виртуальных узлов, изобретенной Кауфманом и бурно развивающейся в настоящее время.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение дополнительных глав теории узлов.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теории узлов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории узлов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории узлов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции   |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи   |
|   | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи   |
|   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
|   | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи   |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности                   | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения  |
|   | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки   |
|   | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов   |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности                             |
|   | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области         |
|   | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности   |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты   | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
|   | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)  |

|   |   |
|---|---|
| (публикации, проекты)   | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                                     |
|   | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности                    |
|   | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты                                |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию   | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации   |
|   | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива  |
|   | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях  |

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории узлов;
- современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| №                     | Тема (раздел) дисциплины                                   | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
|                       |  | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1                     | Гомологии Хованова.  | 4   | 4        |                 | 9              |
| 2                     | Инварианты.  | 4   | 4        |                 | 10             |
| 3                     | Виртуальные узлы, инвариантные полиномы виртуальных узлов. | 6   | 6        |                 | 12             |
| 4                     | Инварианты узлов.  | 6   | 6        |                 | 10             |
| 5                     | Свободны узлы.   | 6   | 6        |                 | 16             |
| 6                     | Лежандровы узлы.   | 4   | 4        |                 | 18             |
| Итого часов           |  | 30  | 30       |                 | 75             |
| Подготовка к экзамену |  | 0 час.  |          |                 |                |
| Общая трудоёмкость    |  | 135 час., 3 зач.ед.   |          |                 |                |

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

##### 1. Гомологии Хованова.

Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами. Свойства гомологий Хованова.

##### 2. Инварианты.

Скобка Кауффмана: определение, Полином Джонса, определение через скобку Кауффмана. Теорема Кауффмана-Мурасуги.

##### 3. Виртуальные узлы, инвариантные полиномы виртуальных узлов.

Виртуальные узлы и зацепления и их простейшие инварианты. Гауссовы диаграммы и инварианты конечного порядка виртуальных узлов.

##### 4. Инварианты узлов.

Определение биквандла, инвариант раскрасок цветами из биквандла Инварианты узлов со значениями в картинках.

##### 5. Свободны узлы.

Свободные узлы, Четность, Скобки. Определение биквандла, инвариант раскрасок цветами из биквандла.

##### 6. Лежандровы узлы.

Инвариант Расмуссена. Инварианты Хегора-Флоера. Диаграмма Хегора.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Введение в теорию узлов [Текст] = Introduction to knot theory/Р. Кроуэлл, Р. Фокс , -М., Мир, 1967
2. Общая топология. Основные конструкции [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов .— М. : Изд-во МГУ, 1988 .— 250, [2] с. - Библиогр.: с. 252. - 5000 экз. - ISBN 5-211-00082-X (в пер.).

### Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер гпер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Учебная аудитория, экран и проектор.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Анализ данных в экономике  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции   |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи   |
|   | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи   |
|   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
|   | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи   |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности   | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения  |
|   | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки   |
|   | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов   |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности                                       | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности   |
|   | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области                                 |
|   | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности   |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)   | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения                         |
|   | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)  |
|   | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                                     |
|   | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности                    |
|   | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты                                |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию   | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации   |
|   | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива  |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория узлов. Дополнительные главы» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории узлов;
- современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

Примеры заданий для контрольной работы.

1. Свойства гомологий Хованова
2. Согласно предложенным условиям вычислить скобку Кауфмана.
3. Теорема Кауфмана-Мурасуги.
4. Свойства Полинома Джонса
5. Посчитайте число раскрасок от зацепления Хопфа
6. Нетривиальность числа раскрасок от зацепления Хопфа.
7. Посчитайте инвариант раскрасок от колец Борромео.
8. Покажите, что инвариант раскрасок от колец Борромео неизотопны тривиальному трехкомпонентному зацеплению.
9. Найдите полином Конвея от восьмерки
10. Покажите, что восьмерка неизотопна правому трилистнику.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Гомологии Хованова.



2. Инвариант Расмуссена.
3. Инварианты Хегора-Флоера
4. Диаграмма Хегора
5. Лежандровы узлы. Инварианты Чеканова. ДГА.
6. Атомы, d-диаграммы
7. Виртуальные узлы, Инвариантные полиномы виртуальных узлов
8. Свободные узлы, Четность, Скобки
9. Определение биквандла, инвариант раскрасок цветами из биквандла
10. Инварианты узлов со значениями в картинках.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.